三体問題とカオス(基研短期研究会「自己重力多体系における非線形・非平衡現象」報告,研究会報告)

谷川, 清隆

三体問題とカオス

谷川清隆（国立天文台）

1. 序

高次元の保存系ではカオスが大海になっていると思われる．この大海の中で、安定多様体と不安定多様体が重要な役割を果している．Hamilton 系は保存系の一種であり、N 体問題はさらに Hamilton 系に属する．N 体問題、なかんずく三体問題には一般の保存系や Hamilton 系にない特徴があるはずである．筆者はこの報告で、その重要な特徴の一つを述べたい．

2. 力学系とフラクタル

「カオスはフラクタルに棲む.」この言葉を誰が言ったのか知らないが、カオスの特徴をよくとらえた言葉である．力学系がカオス状態になると相空間にフラクタル図形が現われ、系の状態はこのフラクタル図形の上を動きまわる．逆に、力学系の相空間にフラクタル図形が現われれば、カオスになるのである．ではこのフラクタル図形の担い手は何か？できるだけ一般的に答えるならば、「それはある種の不変集合である.」となろう．保存系と非保存系では事情が異なる．

そこで、まず非保存系、とくに散逸系について簡単に述べておく．ここで散逸系とは相空間の体積が時間とともに一方的に減少する力学系である．この系にはアトラクターが存在し、相空間の点は、例外的な点を除いて、時間とともにこのアトラクターに引き寄せられる．ある時間経過すれば、系の状態はアトラクター上にあると思ってよい．したがって、なんらかの平均量を求めるには、アトラクターの構造を知ればよい．このアトラクターがフラクタル図形になると一般にストレンジアトラクターと呼ばれる．Hénon 写像 [1] の場合に、ストレンジアトラクターが周期解の不安定多様体の閉包であることを Benedicks & Carleson[2] が示した．他の散逸系においても彼らの主張が成り立つことが期待されている．系によってはアトラクターが複数個存在する場合があるが、このときアトラクターの勢力圏 (Basin) の境界は周期解の安定多様体 (またはその閉包) であることが知られている [3]．カオスになると Basin 境界もフラクタル図形になる．系がどちらのアトラクターに引き寄せられるかを決めるのが Basin 境界であるから、散逸系においてこの構造を知ることは重要である．以上のことをまとめると、散逸系においてフラクタル図形の担い手は安定多様体と不安定多様体である．

次に保存系について述べる．保存系が散逸系と最も異なる点は、保存系にアトラクターが存在しないことである．このためカオスになると、例外的な点を除いて、相空間の点が時間とともにどこを動きまわるかを決定することが散逸系に比べてはるかにむずかしい．しかし手がかりはある．それが上で述べた「ある種の不変集合」である．保存系にも当然安定多様体と不安定多様体はある．カオスになると、これらが「一本、一本」フラクタル図形を構成する．しかも仲間を集めて束になって、時間とともに相空間内をうろつく．それ以外に、KAM 曲線と Aubry-Mather 集合 [4] が知られている．KAM 曲線は一本ではフラクタル図形ではないが、KAM 曲線群は全体としてフラクタル図形をなす．Aubry-Mather

集合は一本の KAM 曲線の残骸であって、もとの KAM 曲線に沿う方向にフラクタルな図形になっている．散逸系でもそうだが、周期点も不変集合である．周期点は分岐によって増殖する．一連の分岐で生じた周期点全体は実はフラクタル図形を構成する．

よく知られているように、相空間の次元が 3 なら、KAM 曲面で囲まれた領域の点は時間が経ってもその領域にとどまる．相空間の次元が 4 以上のときは、Arnold 拡散 [4,5] によって、時間とともにこの領域からしみだしていくが、そのタイムスケールは長い．つまり、KAM 曲面を見つけることができれば、その中はほぼ安定と思ってよい．したがって、最外側 KAM 曲面を見つけることは、保存力学系の基本問題の一つと言える．保存系のカオスの程度が甚だしくなると、KAM 曲面で囲まれる領域の体積は、相空間全体の体積に比べて小さくなる．いわば、KAM 曲面群は「カオスの海」に浮かぶ島々となる．

ではカオスの海でフラクタル図形を担っているものは何か？これが安定多様体と不安定多様体である．相空間内の流れは、未来に向かっては不安定多様体に沿うように、過去に向かっては安定多様体に沿うように動く．したがって、安定多様体や不安定多様体が相空間の中でどのような構造をしているかが解れば大変好都合である．たとえば、不安定多様体の束が密にあるところでは、未来に向かって滞在時間が長く、疎なところは滞在時間が短いと思われる．(Hamilton 系の場合は可逆性により、安定多様体と不安定多様体の分布に対称性がある.)

問題は、安定多様体や不安定多様体の分布をどうやって求めるか、である．一般にこれは非常にむずかしい．高次元の力学系の場合はほとんど絶望的に思える．これらは一本ずつ不安定な周期解から出ているから、周期解の分布を知る必要がある．周期解の分布密度の濃いところではこれらの分布も濃いはずである．上に述べたように、周期解は分岐によって増殖し、フラクタル図形をなすから、はじめの周期解（母周期解）が重要な役割を果たす．母、子、孫、…の周期解の安定多様体・不安定多様体ははじめから手をつないでいる（横断的に交わっている）と思われる [6]．安定多様体や不安定多様体の分布には規則性があるはずである．

3. 三体同時衝突

N 体問題においては、二体またはそれ以上の衝突に対応する相空間の点では運動方程式は定義されていない．いわば、相空間に「穴」があいているのである．二体衝突は解析的には代数的分岐点であって、衝突後へ解析接続できることはよく知られている [7]．この意味で、「穴」は補修できると思ってよい．一方、三体衝突においては解の存在と一意性が保証されなくなり、解は衝突後へ解析接続できない．ところが、1974 年、McGehee[8] は三体衝突の近傍を調べるのに都合のよい新しい変数を発見したのである．以下ではその変数の意義について述べることにする．

N 体問題で N 体の同時衝突が起こるとき、衝突の直前には N 体の配置が中心図形 (central configuration) と呼ばれる対称性のよい形に限りなく近づくことが知られている [9]．このことから、衝突直前の状態を記述するには、任意の 2 つの物体の運動を知ればよいことになる．残りの物体の運動は、中心図形の形さえ知れれば、対称性により指定することができる．だから N 体同時衝突であっても、あたかも二体衝突のように記述することができる．もちろんこれは衝突までであって、衝突後に解が解析接続できるかどうかは別問題であるが．McGehee は三体問題の同時衝突の場合に、座標を極座標に変換し、時間は二体の距離

rを用いて $dt/d\tau = r^{3/2}$で新しい変数τに変換する．この変数では、$r=0$が不変多様体になり、その上に不動点がある．彼はこれを衝突多様体と呼んだ．衝突運動は新しい時間変数τでは無限時間かかってこの不動点に達する．衝突軌道は衝突多様体上の不動点に漸近する安定多様体を構成すると解釈できる．逆に衝突の初期条件から出発する放出軌道の場合は不安定多様体を構成すると解釈できる．McGehee は、衝突多様体を相空間につけ加えて三体衝突に関して、相空間の「穴」を埋めたのである [18]．

McGehee の変数が都合のよいところは、近接衝突運動がうまく記述できることである．衝突多様体の外の軌道の流れが滑らかに衝突多様体上の流れにつながっているのである．もちろん衝突多様体上の流れには意味はないが、そこでの流れは非常に単純なのである．Sundman 以来、二体衝突の正則化には、いくつかの方法が知られているが、McGehee の変数は二体衝突の正則化変数としても使えることは明らかである．Lacomba & Llibre[10] はこのことを利用して制限三体問題の積分不可能性の別証を与えた．McGehee の変数はたいへん有用である．

4. 三体問題のカオス

1960 年以前には、三体問題に限らず、数値計算は細々と行なわれていた．電子計算機の発達のおかげで、1960 年代以後、計算機シミュレーションが爆発的に行なわれだした．痛快なことに、三体問題では日本の薮下氏の数値計算がはじまりである [11]．最近までの成果に関しては、Valtonen ら [12,13] や Anosova[14] のレビューを参考にしていただきたい．また、数値計算以前の三体問題の最終運動に関しては Alekseev によるレビュー [15] が詳しい．

制限三体問題では、はやくも 1965 年に Hénon[16] により力学系の見地から精力的に数値計算がはじめられ、それ以後、KAM 理論との突き合わせや太陽系への応用 (たとえば、[17]) が、広く行なわれてきた．カオスに関係する研究もすでに豊富にある．(一般) 三体問題において数値的にカオスを検出しようという試みは比較的新しいようだ．N 体系の中で三体問題に関係する各種現象の生成確率を求める試みはたくさんある [12,13] が、まともに三体問題のカオスと取り組む研究はいままで少なかったように思える．ただ、調べた文献の量が少ないので見逃している可能性は大いにある．Leningrad 学派 (Anosova や Agekian[14 参照]) の結果はカオスに興味を持つ研究者にとって刺激的である．

三体問題の周期解は一般に非常に不安定であると思われる。おそらく、カオスの解析が遅く始まったのは、これが理由であろう．不安定な周期解を数値的に求めることはむずかしい．ところが上に述べたように、McGehee[8] によれば、衝突の状態は不動点であり、衝突軌道、放出軌道はそれぞれ不動点をとおる安定および不安定多様体である．したがって、われわれは、はじめから不動点が与えられ、しかもその安定および不安定多様体つまり衝突および放出軌道を容易に計算できるのである．これは願ってもない状況である．一般の保存系や Hamilton 系にない特徴を述べると序で予告したが、これがその特徴である．衝突軌道のこの特性を利用すれば、三体問題のカオス解析が比較的容易になると思われる．

おわりに

最近、Xia[19] が 5 体問題において、非衝突特異性の存在を証明した．これは注目すべき結果であると思われる．N 体問題の特異性とは、解が、ある有限時刻以後 (または以前) 解析接続できなくなることを言う．三体以上の同時衝突により解が接続できなくなることはよく知られている．それ以外の特異性があるかどうかは長年の懸案であった．有限時間

でN体のどれかが無限遠に去るとき非衝突特異性といわれる．常識的に非常に考えにくい状況であるが、Xiaは5体の特別な配置から出発してその存在を示した．その際、途中で二体衝突も起こらないのである．ますます考えにくい．彼はMcGeheeの変数を使い、力学系でしばしば用いられる記号力学をつかった．

もちろん、重力のポテンシャルの深さに際限のないことが本質的である．逃げる物体がいかに効率よく重力ポテンシャルからエネルギーを引き出すかという質問に対して、有限時間で無限に引き出せることをXiaは示した．このことはN体問題研究者に対する重大な挑戦のように思える．

参考文献

[1] M.Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50**(1976), 69-77.

[2] M.Benedicks and L.Carleson, The dynamics of the Hénon map, *Ann. Math.* **133**(1991),73-169.

[3] E.Ott, *Chaos in Dynamical systems*, Cambridge Unversity Press, Cambridge, 1993.

[4] R.S.Mackay and J.D.Meiss, *Hamiltonian Dynamical Systems* (A reprint selection), Adam Hilger, Bristol, 1987.

[5] N.N.Nekhoroshev, An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems, *Russ. Math. Survey* **32**(1977), 1-65.

[6] Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, Structure change of stable and unstable manifolds in two-dimensional maps: period-doubling bifurcation, *Chaos, Solitions & Fractals* **2**(1992), 139-146.

[7] V.Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York, 1967.

[8] R.McGehee, Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27**(1974), 191-227.

[9] A.Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*, Oxford University Press, London, 1947.

[10] E.A.Lacomba and J.Llibre, Transversal ejection-collision orbits for the restricted problem and the Hill's problem with applications, *J. Diff. Equations* **74** (1988), 69-85.

[11] S.Yabushita, Lifetime of binary stars, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **133** (1966), 133-143.

[12] M.Valtonen, The general three-body problem in astrophysics, *Vistas in Astronomy* **32** (1988), 23-48.

[13] M.Valtonen and S.Mikkola, The few-body problem in astrophysics, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **29** (1991), 9-29.

[14] J.P.Anosova, Dynamical evolution of triple systems, *Astrophys. Space Sci.* **124** (1986), 217-241.

[15] V.M.Alekseev, Quasirandom oscillations and qualitative questions in celestial mechanics, *Amer. Math. Soc. Trans.* **116** (1981), 97-169.

[16] M.Hénon, Exploration numérique du probléme restreint IV. - masses égales, orbites non périodiques, *Bull. astr.* **1** (1966), 49-66. 1965年の論文に関してはこの中の参考文献参照.

[17] K.Tanikawa, N.Kikuchi, I.Sato, On the origin of the planetary spin by accretion of planetesimals II. Collisional orbits at the Hill surface, *Icarus* (1991), 112-125.

[18] Z.Xia, The existence of noncollision singularities in newtonian systems, *Ann. Math.* **135** (1992), 411-468.